21/10/2016

Μορφές Γραφής Φυσικών

$1013 = 1\cdot 10^3 + 0\cdot 10^2 + 1\cdot 10 + 3\cdot 10^0$

" μεταφρασεις

$1003 =_2 a_v \cdot 2^v + a_{v-1}\cdot 2^{v-1} + \dots + a_1 \cdot 2 + a_0$

$\neq 0$

$a_v, a_{v-1}, \dots, a_0 \in \{0,1\}$

Θεώρημα

Κάθε φυσικός αριθμός $m>0$ γράφεται μοναδικά με βάση το 2.

$m = a_v \cdot 2^v + \dots + a_1 \cdot 2 + a_0$ με $a_v \neq 0$ και $a_i \in \{0,1\}$

Απόδειξη (Ισχ. Μαθ. Επαγ.)

$m=1$ ισχύει

$m=2 = 1\cdot 2^1 + 0$ ισχύει

$m=3 = 1\cdot 2^1 + 1$ ισχύει

Υποθέτουμε ότι ισχύει $\forall i<k$. Θα το δείξουμε για k.

$k = 2l \Rightarrow \frac{k}{2} = l < k \Rightarrow$

$l = a_t 2^t + a_{t-1}\cdot 2^{t-1} + \dots + a_1 2 + a_0 \Rightarrow$

$k = 2l = a_t \cdot 2^{t+1} + a_{t-1}\cdot 2^t + \dots + a_1 2^2 + a_0 \cdot 2$

γράφεται στην ζητούμενη μορφή.

$k = 2l+1 \Rightarrow k-1 = 2l < k \Rightarrow \frac{k-1}{2} = l < k$

$l = a_t \cdot 2^t + \dots + a_1 2 + a_0 \Rightarrow$

$k-1 = a_t \cdot 2^{t+1} + \dots + a_1 \cdot 2^2 + a_0 \cdot 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow k = a_t 2^{t+1} + \dots + a_1 \cdot 2^2 + a_0 \cdot 2 + 1$

Μοναδικότητα με επαγωγή

Έστω $Q(m)$ η επόμενη πρόταση

$\left(\begin{array}{l} \text{Αν } m = c_r \cdot 2^r + \dots + c_1 \cdot 2 + c_0 \text{ και} \\ m = c_s' 2^s + \dots + c_1' \cdot 2 + c_0' \end{array} \right\} \Rightarrow$

$r = s$ και $c_i = c_i'$ $\quad 0 \le i \le r$

$Q(1)$ 1 γράφεται μοναδικά

$Q(2)$ 2 $\Rightarrow$ $\Rightarrow$

Υποθέτουμε ότι η πρόταση $Q(n)$ είναι αληθής για $n<k$.
Θα το αποδείξουμε για k.

$k = c_r \cdot 2^r + \dots + c_1 \cdot 2 + c_0$

$k = c_s' \cdot 2^s + \dots + c_1' \cdot 2 + c_0'$

Δύο περιπτώσεις

$\boxed{k = 2l} \Rightarrow c_0 = c_0' = 0$

$\frac{k}{2} = l = c_r \cdot 2^{r-1} + \dots + c_1 = c_s' \cdot 2^{s-1} + \dots + c_1' < k \xRightarrow{\text{Υπόθεση}}$

$r = s$ και $c_i = c_i' \Rightarrow Q(k)$ αληθής

$\boxed{k = 2l+1} \Rightarrow c_0 = 1 = c_0' \Rightarrow k-1 = 2l = c_r \cdot 2^{r-1} + c_1 = c_s \cdot 2^{s-1} + \dots + c_1'$

Από υπόθεση έχουμε τα ζητούμενα

τα το ξέρω

Άσκηση: $n=1013$ Βρες τη μεγαλύτερη δύναμη του 2 που διαιρεί το n

$\rightarrow 2^9 = 512$

$1013 \,|\, 512$, $501 \,|\, 1$ $\qquad$ $501 \,|\, 256 = 2^8$, $245 \,|\, 1$

$245 \,|\, 128 = 2^7$, $117 \,|\, 1$ $\qquad$ $117 \,|\, 64 = 2^6$, $53 \,|\, 1$ $\qquad$ $53 \,|\, 32$, $21 \,|\, 2^5$ $\qquad$ $21 \,|\, 16 = 2^4$, $5 \,|\, 1$

$5 \,|\, 4 = 2^2$, $1 \,|\, 1$

άρα $1013 = 1\cdot 2^9 + 1\cdot 2^8 + 1\cdot 2^7 + 1\cdot 2^6 + 1\cdot 2^5 + 1\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2 + 1$

111 με βάση 3. $\quad 3^4 = 81$

$111 \,|\, 81 = 3^4$, $30 \,|\, 1$

άρα $111 = 1\cdot 3^4 + 1\cdot 3^3 + 0\cdot 3^2 + 1\cdot 3 + 0$

$30 \,|\, 3^3 = 27$, $3 \,|\, 1$ $\qquad$ $3 \,|\, 3$, $0 \,|\, 1$

Μεταθέσεις - Συνδυασμοί

$A = \{0, \square, +\} = \{\square, 0, +\}$

Αν μας ενδιαφέρει η σειρά:

$(0, \square, +) \neq (\square, 0, +) \neq (\square, +, 0)$

Μεταθέσεις = μας ενδιαφέρει η σειρά

$(\underset{3}{\_}, \underset{2}{\_}, \underset{1}{\_}) = 6$ επιλογές

Πόσες διάδες δημιουργούνται: $(\underset{3}{\_}, \underset{2}{\_})$ 6 επιλογές

$A = \{1, 0, \square, +\}$

Πόσες διάδες: $(\underset{4}{\_}, \underset{3}{\_})$ 12 επιλογές

Πόσες τριάδες:

$(\underset{4}{\_}, \underset{3}{\_}, \underset{2}{\_}) = 24$ επιλογές

Πόσες κ-άδες δημιουργούνται από n στοιχεία, Εδώ $k \leq n$

$$(\underset{\substack{n\\ \uparrow\\ 1^{\eta}}}{\_}, \underset{\substack{n-1\\ \downarrow\\ 2^{\eta}}}{\_}, \underset{\substack{n-2\\ \downarrow\\ 3^{\eta}\ \text{θέση}}}{\_}, \dots, \underset{\substack{n-(k-1)\\ \uparrow\\ k\text{-θέση}}}{\_}) = \frac{n(n-1)(n-(k-1))\boxed{(n-k)(n-k-1)\dots 1}}{(n-k)(n-k-1)\dots 1} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Θεώρημα

Το πλήθος των μεταθέσεων κ-στοιχείων (κ-άδων) από μια συλλογή με n στοιχεία δίνεται από

$$\boxed{\frac{n!}{(n-k)!}}$$

$A = \{1, \square, 0, +\}$

Πόσα 2-άδων δημιουργούνται από το A;

Αν μας ενδιαφέρει η σειρά έχουμε $\frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!}$

$(\square, 0) \neq (0, \square)$

$$\frac{\frac{4!}{2!}}{2!} = \frac{4!}{2!\,2!} \qquad \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$$

αλλάζει η σειρά

Ορισμός

Μια κ-μετάθεση ενός συνόλου n-στοιχείων είναι μια διατεταγμένη (έχει σημασία η σειρά) επιλογή κ στοιχείων από το n. Ο αριθμός των κ-μεταθέσεων ενός συνόλου n στοιχείων συμβολίζεται με $M(n,k)$

Πρόταση

$$M(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Ορισμός
Έστω $1 \leq k \leq n$.
Ένας k-συνδυασμός από ένα σύνολο A με n στοιχεία είναι ένα υποσύνολο B με k στοιχεία από το A.

Πρόταση
Το πλήθος των k συνδυασμών από n στοιχεία δίνεται από

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Απόδειξη
Θα βρούμε πρώτα όλες τις k-μεταθέσεις. Αυτές είναι $M(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$. Κάθε μια συμμετρισμένη αποτελείται από k στοιχεία. Άρα, αυτά τα k στοιχεία δίνουν k-μεταθέσεις. Αν δεν μας ενδιαφέρει η σειρά διαιρούμε το

$$\frac{M(n,k)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$$

$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b)$

$a^2b = a \cdot a \cdot b = a \cdot b \cdot a = b \cdot a \cdot a$

Ιδιότητες

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \quad (1)$$

$$\binom{n+2}{k} = \binom{n}{k-2} + 2\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

Άσκηση: να κάνω τις αποδείξεις

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} + \frac{n!}{(n-k+1)!\,(k-1)!} =$$

$$= \frac{n!\,(n-k+1)}{k!\,(n-k)(n-k+1)} + \frac{n!\,k}{(k-1)!\,(n-k+1)!\,k}$$

$$= \frac{n!\,(n-k+1)}{k!\,(n-k+1)!} + \frac{n!\,k}{k!\,(n-k+1)!} = \frac{n!\,(n\cancel{-k}+1\cancel{+k})}{k!\,(n-k+1)}$$

$$= \frac{n!\,(n+1)}{k!\,((n+1)-k)!} = \frac{(n+1)!}{k!\,((n+1)-k)!} = \binom{n+1}{k}$$

$$\cancel{\binom{n}{k-2} + 2\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k+2)!\,(k-2)!} + 2\,\frac{n!}{(n-k+1)!\,(k-1)!} + \frac{n!}{(n-k)!\,k!}}$$

$=$